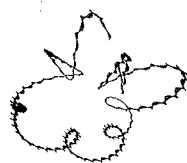


経済バブルの数理モデリング



大西 立顕・渡辺 努

1. はじめに

株や土地などの資産の価格は大きく変動することがあり、人々の生活に甚大な影響を及ぼす。資産価格の変動の中でもとりわけ重要なのはいわゆるバブル（泡）である。バブルとはその名のとおり、資産価格が急成長した後にパチンとはじけてしまう現象であり、2008年にはじけた米国の住宅バブルや1990年代初頭にはじけた日本の不動産と株のバブルが有名である。ビットコイン価格の急落もバブル崩壊の例である。過去の経験則では、バブルが育つ過程では大儲けをする人が出て来る一方で、バブルがはじけると銀行が大きな損失を被り、その後、長期にわたる経済の停滞が続く。

そもそも資産の価格はどのように決まるのか。例えば、株を保有するというはその企業の将来の利益の一部を分け前として受け取る権利を得ることだから、今日の株価は、その企業がこの先、どの程度の利益を上げるかによって決まる。例えば、その企業が技術開発に成功すれば将来の利益は上がると予想されるので株価は上がる。土地も同様で、例えば農地であればその土地から将来どのくらいの作物が収穫できるかがその農地の価格を決める。このように将来の利益や収穫に関する予想によって決まる価格のことを経済学ではファンダメンタルズとよんでいる。通常の状態では「資産価格＝ファンダメンタルズ」が成立している（効率市場仮説）。

これに対してバブルは資産価格がファンダメンタルズから乖離する現象である。この現象について研究者はこれまで2つの側面から研究を進めてきた。第1は、バブルが起きていることをどうやって知るかである。バブルがいま起きているかどうかかわかれば、政府や中央銀行は対応可能だ。しかし過去の経験則によれば、バブルの渦中にそれをバブルと認識することは非常に難しい。例えば、米国の中央銀行の議長を務め経済のマエストロとも称されたアラン・グリーンスパンは「バブルは崩壊して初めてバブルとわかる」と述べている。バブルが起きているかどうかを知るにはファンダメンタルズを計測するというのが王道だ。しかし経済学者によるこれまでの研究ではファンダメンタルズを精度高く計測するのは困難とされている¹⁾。そこで別な方法として提案されているのが、不動産価格や株価のクロスセクション分布の形状からバブルか否かを判別する手法だ。本稿の第2節と第3節ではこの手法について解説する。バブル研究の第2の柱はバブルの形成と崩壊が起こるメカニズムの解明だ。第4節ではこの点について解説する。第5節では最近の展開として、株式市場と暗号通貨ビットコインのバブルについて紹介する。

2. 不動産価格のクロスセクション分布を用いたバブル判定

1986～2015年に首都圏で実際に取引された中古

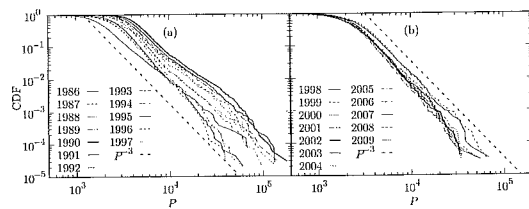


図1 中古マンションについて、年別にみた価格 P の相補累積分布関数。

マンションの売買データ（リクルート社提供の約100万件の物件）を使って日本の不動産バブルの研究した^{2,3)}。このデータには取引日、価格 P [千円]、面積 S [m²]、緯度、経度、築後年数、都心までの時間、階、構造などの情報も含まれているので、詳細な属性情報も分析に利用できる。

各年毎にどのような価格で取引されていたかを知るために、 P 以上の価格で取引された物件の個数を全物件数の割合としてプロットした相補累積分布関数（Complementary Cumulative Distribution Function; CDF）を調べた（図1）。バブルが発生した1986～1990年は、分布が右にずれており、全体として取引価格が高くなっていることが分かる。しかし、分布の形は、どの年もベキ指数 $\alpha \approx 3$ のベキ分布（パレート分布）

$$\Pr(\geq P) \propto P^{-\alpha}$$

に従っており、時期に依存していない。

物件には20m²のものもあれば、40m²のものもある。先ほどの価格分布は、このような物件属性の違いを無視してごっちゃになった状態を観測したものになってしまっている。そこで、価格と物件属性がどのように関係しているかを網羅的に調べた。その結果、価格は面積と強く相関しているが、他の属性情報からの影響はほとんどないことが判明した。価格と面積がどのような関係になっているかを素朴に想像すると、面積が倍になれば価格も倍になるという比例関係 $P \propto S$ が想定される。この場合、平米単価（1m²あたりの価格）を使えば物件属性の違いが調整できることになる。しかし、データから調べてみるとこの比例関係は成り立たず、実際には対数価格が面積に比例する

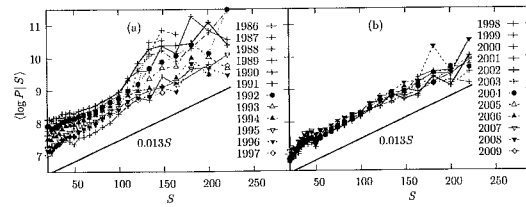


図2 中古マンションについて、年別にみた面積 S の物件の平均価格 P 。

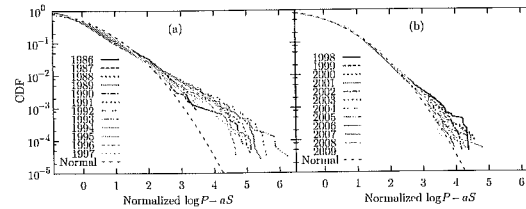


図3 中古マンションについて、年別にみた平均0、分散1に規格化した調整価格 $(Q - (Q)) / \sqrt{(Q - (Q))^2}$ の相補累積分布関数。点線は標準正規分布。

関係

$$\log P = aS + Q, \quad a \approx 0.013$$

があり、面積が広くなるほど価格は指数関数的に高くなることが分かった（図2）。面積が50m²増える毎に価格は2倍になる関係があり、100m²の物件は50m²の物件の2倍の価格であり、150m²の物件は100m²の物件の2倍の価格になっている。日常の場面では平米単価で物件を比較することも多いが、不動産業界の実務の現場では平米単価では異なる物件間をうまく比較できないことが認知されており、物件を面積の大きさに大中小の3グループに分類し、それぞれのグループ内の物件同士を平米単価で比較するということが行われている。なお、大中小の3グループは、面積の大きい物件はお金持ち用、中程度の物件は居住用、小さい物件は投資用という分類に対応する。

ごっちゃになった状態ではなく物件の面積の違いを調整した価格 $Q = \log P - aS$ でみて、どのような価格で取引されていたかを調べた（図3）。面積の違いを調整したので、どの物件も同じ価格になることが理想的には想定されるが、現実にはある程度の価格のばらつき（ゆらぎ）が生じる。このようなゆらぎが、（平均と分散が有限の独立同分

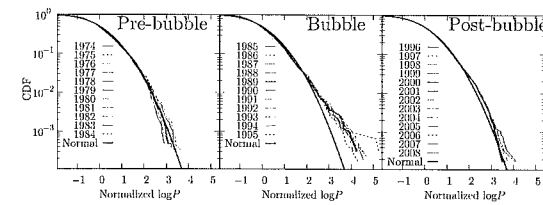


図4 首都圏の住宅地について、年別にみた平均0、分散1に規格化した対数価格の相補累積分布関数。太線は標準正規分布。

布に従う）誤差が集積することで生じているなら、ゆらぎ分布は正規分布に従うことが知られている（中心極限定理）。実際、1998～2012年のバブル崩壊後はこのような正常な状態になっているため、分布は正規分布に従っている。一方、バブルと言われる1986～1997年は、ゆらぎ分布が正規分布から統計的に有意に乖離している。つまり、調整価格のばらつきはバブル崩壊後は正規分布、バブル期は裾の長い分布に従うことが判明した。

それでは、バブル発生前の調整価格のばらつきは正規分布に従っているだろうか。残念ながら中古マンションのデータは1986年以降のデータしかないため、これを分析することはできない。そこで、1974～2008年の首都圏の住宅地に関する地価公示価格のデータを使ってこれを調べた。このデータには、代表的な約数千地点の標準的な住宅に関して、不動産鑑定士が鑑定して算出した価格と面積の情報が入っている。なお、このデータに含まれる物件はすべて標準的な住宅であるため価格を面積で調整する必要はなく、価格を面積で調整したとしても実質的に同じ分析結果が得られる。対数価格の分布を調べた結果、バブル発生前とバブル崩壊後は正規分布に従うが、バブル期は正規分布から乖離することが確認できた（図4）。対数価格のばらつきをゆらぎとして解釈し、正規分布からの乖離に注目することで、バブルかどうかの判別が可能なることを示している。

3. 不動産バブル度の推定

どうしてバブル期には調整価格の分布が正規分

布から乖離するのかを考えるために、まずは、バブルではない平常時の状況がどのようなものなのかを考えよう。平常時は、調整価格が正規分布に従っているため、異なる2つの物件の調整価格の違いは誤差とみなせる程度に小さく、概ね同じ価格で取引されている。これは、同じ品質の2つの商品が同じ価格で取引されること（裁定取引の機会がない）を意味し、2つの物件の間に価格裁定が働いていることになる。価格裁定が働く領域が同一需給圏（価格形成において相互に影響を及ぼす物件が存在する圏域）であるから、平常時は首都圏全体が1つの大きな同一需給圏を形成し、首都圏全体で一物一価（同一の物件は同一の価格）が成り立つ。

一方、バブル期は調整価格が正規分布から乖離し、2つの物件が同じ価格で取引されているとは言えない。そのため、全体が1つの同一需給圏にはなっていないため、価格裁定が働かず一物一価になっていないため、ほぼ同じ2つの物件が誤差の範囲を越えて大きく異なる価格で取引されることがあり得る。おそらく、バブル時には投資家が近視眼的になり関心を持つ地域の範囲が極端に狭くなるため、同一需給圏の大きさが小さくなっていると考えられる。つまり、地域毎に異なる同一需給圏が形成されていて、首都圏全体に複数の異なる同一需給圏が構成されていることになる。このように考えると、バブル期でも、首都圏すべての物件を観測するのではなく、地域の大きさを十分に狭めた特定地域内（同一需給圏内）の物件だけを観測すれば調整価格のゆらぎは正規分布に従うはずである。さらに観測する地域の大きさを狭めていけば、やがて同一需給圏内の大きさに狭まり、そこでは正常なゆらぎ（正規分布）が観測されるはずである。

これを確かめるために、各物件の近隣の地域内だけで調整価格の分布を調べる。まず、ある物件 i に注目し、物件 i に近接した物件を $n-1$ 個取り出す。そして、これら n 個の物件の調整価格を用いて物件 i の調整価格を平均0、分散1に規格化する（図5）。このようにしてすべての物件につ

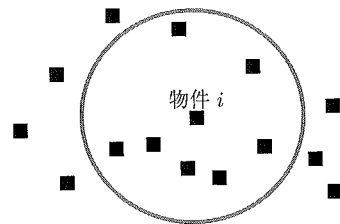


図5 物件*i*の規格化した調整価格の算出. 円の中の*n*個の物件の調整価格を用いて算出する(図は*n* = 8の場合).

いての規格化した調整価格を算出して, 分布を観測した. いろいろな*n*の値でこの観測を行うことで, 地域の大きさをどんどん狭めていった際に分布がどう変化するか調べる.

平常時は, $n \geq 64$ のとき調整価格は正規分布に従っており(図6(a)), 首都圏全体が1つの同一需給圏になっていることが確認できる. なお, $n = 16$ で分布は正規分布よりも早く減衰するが, これはサンプル数が小さいために生じた規格化による有限サイズ効果の影響である. この影響を避けるために, 少なくとも $n > 16$ で観測する必要がある. バブル期は首都圏全体 ($n = +\infty$) でみると調整価格は正規分布から乖離しているが, n が小さくなるにつれて分布は徐々に正規分布に近づき, $n = 64$ で正規分布に収束する(図6(c)). したがって, バブル期においても狭い領域内だけで観測を行えば調整価格は正規分布に従っていることになる. つまり, バブル期には同一需給圏の大きさが小さくなり, 複数個の同一需給圏が形成されることで地域の異質性が強くなっていることを示している. これがバブル期に調整価格が正規分布から乖離する原因であり, 異なる平均・分散をもつ正規分布の重ね合わせにより分布が生成されていることが示唆される. なお, 結果の妥当性を確認するために, 2つの物件の緯度(経度)をランダムに入れ換えたデータを仮想的に作成し, このデータについても同じ分析を行った. このランダム化したデータは, 緯度(経度)の分布は本物のデータと同一であるが, 空間的な相関は完全に消えているため, 分布は*n*に依存しない(図6(b), (d)). バブル期の正規分布への収束は, 実データ

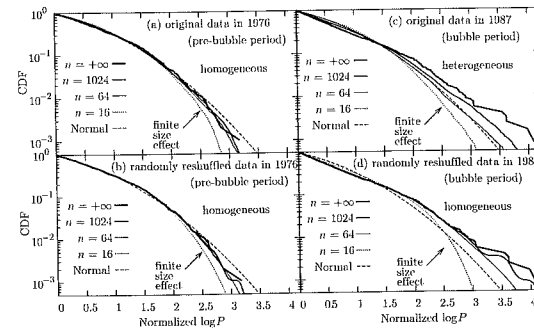


図6 首都圏の住宅地について, バブル前((a), (b))やバブル期((c), (d))における規格化した対数価格の相補累積分布関数.

では観測できるがランダム化したデータでは観測できないことから, 空間的な相関が要因となって生じていることが分かる.

この性質を用いて, 物件が立地する場所毎に同一需給圏の大きさを推定することができる. 物件*i*と物件*i*の近接物件を*n* - 1個取り出し, これら*n*個の物件の調整価格が正規分布するかどうかを検定する. このとき, 正規分布とみなせる最大の*n*の値が, 物件*i*の地点での同一需給圏の大きさである. 同一需給圏の大きさはバブルの度合いを表し, 同一需給圏が狭いほどバブルの度合いが高いので, 物件*i*の地点のバブル度は

$$\Theta_i = \log \left(\frac{\text{その時期の全物件数}}{\text{正規分布とみなせる最大の } n} \right)$$

で定義できる. 同一受給圏の大きさが全物件数に一致する平常時には $\Theta_i = 0$ となり, 正規分布とみなせる最大の*n*の値が小さくなるバブル期には Θ_i は大きな値をとる.

中古マンション売買のデータを用いて年毎にすべての物件についてこの計算を行い, バブル度の空間的な分布を計算した. 計算コストが非常にかかる分析になるため, 東京大学情報基盤センターのスーパーコンピュータを用いて計算を行った. その結果, 1989年頃に都心で発生したバブルが都心の南西部(神奈川県付近)へ波及し(図7), 1992年にバブル度が一番強い状態になり(図8), その後, 南西部からバブルが終息し(図9), 1998年以降は完全にバブルが消失して首都圏全域が1つの需給

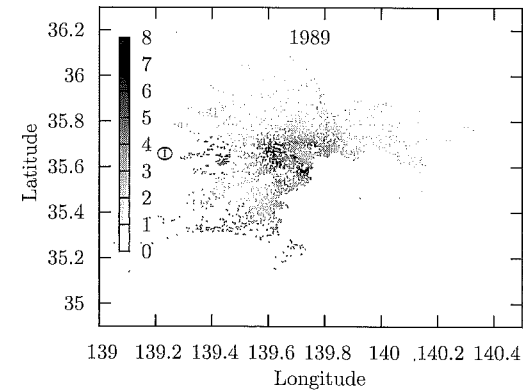


図7 1989年のバブル度 Θ_i の空間分布.

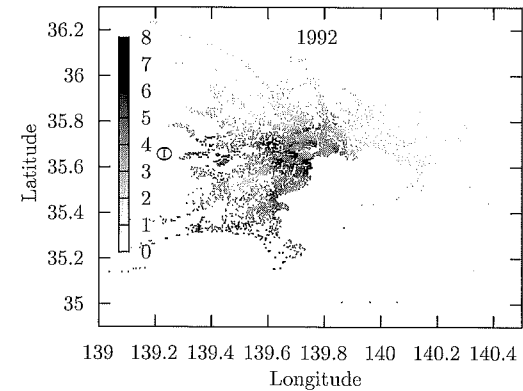


図8 1992年のバブル度 Θ_i の空間分布.

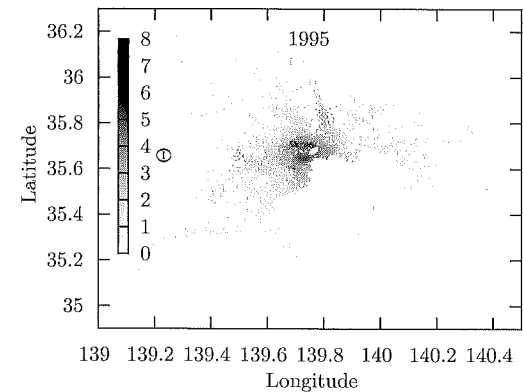


図9 1995年のバブル度 Θ_i の空間分布.

圏になる様子が定量的に観測できた. Θ_i をその時期の全物件で平均した $\langle \Theta \rangle$ の月次推移は図10のようになった. $\langle \Theta \rangle$ は, 不動産バブルと言われる1980年台後半から1990年台前半にかけて大きな値をとり, その後, 2012年までほぼ0に近い値をとっている. そして, アベノミクスが始まる2012年後半から再び継続的に大きな値をとる時期が観

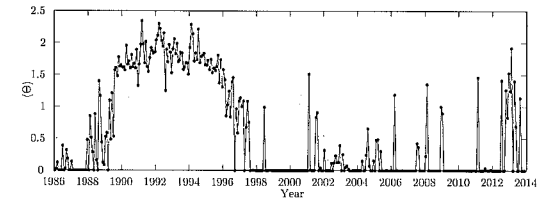


図10 バブルの度合いの平均値 $\langle \Theta \rangle$ の月次推移.

測され, 不動産市場が過熱気味の状態になっていたことが分かる. 実際, この時期は現場では売りに出された物件がすぐに売れるような状況になっており, 現場の感覚と矛盾しない結果が得られている.

4. バブルの形成と崩壊が起こるメカニズム

さて, バブルはなぜ生まれ, なぜはじけるのだろうか. 経済学では資産を売り買いする人々の心理の振れが原因と考えられている⁴⁾. 例えば, 株の値段が将来上がるという強気の心理を人々が突然もつようになったとする. 強気になった人々は株を買い増し, その結果, 実際に株価は上昇する. この反対に, 人々が弱気の心理に転じれば人々は先を争って株を売却し, 株価暴落が起こる. このように, 強気にせよ弱気にせよ, 突然生じた人々の予想の変化が現実のものになるということであり, これは自己実現的な予想とよばれている. 企業の利益に関する予想とは関係なく(したがってファンダメンタルズとも関係なく), 人々の心理が突然変化し, それが人々の行動の変化を誘発し, 最終的には実際の価格も変わる—これが経済学におけるバブルのモデルである. ここでのポイントは, 人々の心理の変化について, その結果として生じる価格の変化と整合的という縛り(経済学における合理性)を課しているということである.

経済学のモデルをもう一步進め, 心理学や社会学のアプローチも取り入れて, 人々の心理の変化を解明するという行われている⁵⁻⁷⁾. そこで強調されているのは, 資産価格の上昇それ自体が強気な心理をさらにあおり, 熱狂を生み, それが資産に対する需要をさらに増やすという, 正の

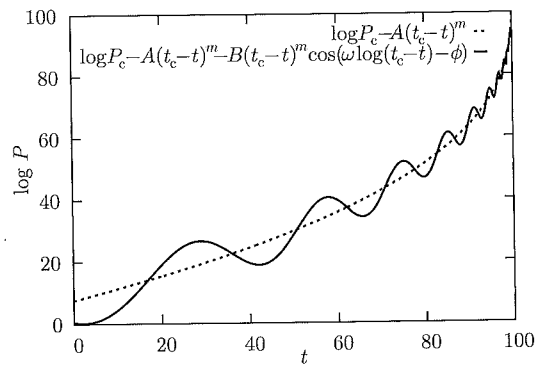


図 11 対数周期べき乗特異値モデルによる対数価格の変動。時刻 $t = t_c (= 100)$ で臨界点をとる。

フィードバックの存在である。その背景には、例えば、株価上昇で儲けた知人に自分もあやかりたいと株式を購入する行動や、価格上昇で資産価値が上昇したのを見て投資家への資金貸付の基準を緩めるといった銀行の行動がある。正のフィードバックの下で資産価格は指数関数より速い速度で上昇を続け、やがては経済全体の規模に比して資産価格が高すぎるという状況が生まれる。この意味で、資産価格の上昇は持続可能性を欠くものであり、バブルの崩壊は不可避である。

正のフィードバックの下での資産価格の変動を描写するモデルとして、対数周期べき乗特異値モデル (LPPLS モデル)^{8~10)}

$$\log P = \underbrace{\log P_c}_{\text{臨界対数価格}} - \underbrace{A(t_c - t)^m}_{\text{べき乗則的な上昇}} - \underbrace{B(t_c - t)^m \cos(\omega \log(t_c - t) - \phi)}_{\text{対数周期で振動する偏差}}$$

が提案されている (図 11)。 t_c はバブルが崩壊する臨界時刻であり、 P_c はその時点での価格である。第 2 項の対数価格のべき乗則的な上昇は、価格が P_c に向かって非線形トレンドを持って加速的に上昇することを表す ($0 < m < 1$)。これは、正のフィードバック効果により、今回の価格上昇が次の価格上昇をさらに増大させ、上昇率自体が上昇することをモデル化している。上昇率そのものが上昇し続ける状態はどこかの時点 t_c で持続できな

くなり、バブルが崩壊する。その間、人々の心理は盲信して強気優勢になったり、疑心暗鬼で弱気優勢になったりを行き来する。第 3 項の対数周期で振動する偏差は、この競合した強気と弱気の期待感が螺旋運動のように振動することをモデル化している。 t_c に近づくにつれて価格は不安定性を増し、偏差の振動数は加速的に大きくなり、ついに $t = t_c$ で発散する。モデル全体としては、対数価格が指数関数的に上昇していく過程で偏差振動の振動数がどんどん大きくなり不安定性を拡大していき、ついに臨界点に達するとバブルが崩壊することになる。このような対数周期振動は、フィードバックループを介した相互作用で自発的に生じることがあり、階層構造を有する複雑な系で幅広く観測される。例えば、機械の故障、病気の進行、地震など、破壊がさらなる破壊を生むような系で対数周期振動が確認されている。

5. 最近の展開

不動産バブルの判定手法は株式市場におけるバブル判定にも応用されている¹¹⁾。上場企業の価値はいろいろな側面から計測することができるため、純資産、売上高、純利益など多くの財務指標が存在している。株価がこれらの財務指標とどのように関係しているかを調べたところ、IT 関連銘柄の多い米国 NASDAQ 株式市場については、株価は一株当たりの純資産と強く相関するが、他の財務指標の影響はほとんどないことが分かった。したがって、 $PBR = (\text{株価}) / (\text{一株当たりの純資産})$ が不動産の調整価格に対応し、PBR の分布でバブルが判定できることになる。実際に PBR の分布を調べたところ、ドットコム・バブルの時期は平常時に比べて分布の裾が長くなっていたことが確かめられた。

暗号通貨についてもバブルの研究が進められている。暗号通貨をマイニングするには高いコストがかかるためそのコストで価値が決まる、暗号通貨の供給量は有限であるため供給バランスで価値が決まるなど、様々な視点から暗号通貨のファン

ダメンタルズを計測する試みが行われてきたが、成功した事例はなかった。しかし最近、暗号通貨を利用する人々のネットワーク価値としてファンダメンタルズを定義することで、暗号通貨のバブル度を推定できることが報告された¹²⁾。

ネットワーク価値を電話を例として説明すると、電話を持っているのが自分 1 人だけの世界では通話できる相手がおらず価値はないが、自分を含め 2 人が電話を持てば通話相手は 1 人、3 人が持てば通話相手は 2 人、4 人が持てば通話相手は 3 人と増えていき、 u 人が持てば通話相手は $u - 1$ 人で、 u 人全員の全体としては $u(u - 1)/2 \approx u^2$ の通話が可能となる。このようにネットワーク価値はネットワークを使用するユーザー数の 2 乗に比例する (メトカーフの法則)。現実にはすべてのユーザーどうしが通話することはなく、通話相手は $(u - 1)^\beta$ 人程度に少なくなるため ($\beta < 1$)、ネットワーク価値は $u^{1+\beta}$ に比例する (一般化されたメトカーフの法則)。ユーザー数が 2 倍になればその価値は 2 倍以上に増大し、ユーザー数が増えれば増えるほど利用価値が飛躍的に向上していく (ネットワーク外部性)。

ビットコインの価格 P は、アクティブユーザー数 u の増加とともに年々上昇している。過去 7 年半のデータ分析から $p \propto u^{1+\beta}$ の関係が成り立ち、 $\beta = 0.69$ と推定されている。これを用いると、バブル度はファンダメンタルズからの乖離の大きさを表す量として $P/u^{1.69}$ で定義できる。実際、過去に起きた 4 つのビットコインバブルは、バブル度が平常値から乖離する時期に発生していたことが確認された。さらに、バブル度が平常値から乖離する時期の価格変動は、対数周期べき乗特異値モデルでうまく再現できることも示されている。ビットコイン市場は歴史が浅く規制がほとんどないため、外乱が入りにくい閉じた系になっている。そのため、他の市場に比べて価格変動のモデルの再現性が良いことも分かってきており、バブルがいつ崩壊するかといったより詳細な警報も出せるようになってきている。

情報技術の進展により、あらゆる分野で多様で

詳細な情報が高頻度に記録される時代になり、世界に流通するデータ量は日々指数関数的に増大している。これらの大規模データを活用することで、経済バブルの研究がさらに進展することを期待している。

参考文献

- 1) Refet S. Gürkaynak, Econometric tests of asset price bubbles: taking stock, *Journal of Economic surveys*, **22**(1), 166-186, 2008.
- 2) Takaaki Ohnishi, Takayuki Mizuno, Chihiro Shimizu and Tsutomu Watanabe, Power Laws in Real Estate Prices during Bubble Periods, *International Journal of Modern Physics: Conference Series*, **16**, 61-81, 2012.
- 3) Takaaki Ohnishi, Takayuki Mizuno, Chihiro Shimizu and Tsutomu Watanabe, Detecting Real Estate Bubbles: A New Approach Based on the Cross-Sectional Dispersion of Property Prices, CARF Working Paper, CARF-F-313, 2013.
- 4) Alberto Martin and Jaume Ventura, The macroeconomics of rational bubbles: a user's guide, *Annual Review of Economics* **10**, 505-539, 2018.
- 5) Katsuhiko Nishinari, Mitsuru Iwamura, Yukiko Umeno Saito and Tsutomu Watanabe, The bursting of housing bubble as jamming phase transition, *Journal of Physics: Conference Series*, **221**(1), 012006, 2010.
- 6) Robert J. Shiller, Speculative asset prices, *American Economic Review*, **104**(6), 1486-1517, 2014.
- 7) Robert J. Shiller, "Irrational exuberance: Revised and expanded third edition", Princeton university press, 2015.
- 8) Anders Johansen, Olivier Ledoit and Didier Sornette. Crashes as critical points, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **3**(2), 219-255, 2000.
- 9) Didier Sornette and Peter Cauwels, Financial Bubbles: Mechanisms and Diagnostics, *Review of Behavioral Economics*, **2**(3), 279-305, 2015.
- 10) Didier Sornette, "Why stock markets crash: critical events in complex financial systems", Princeton University Press, 2017.
- 11) Takayuki Mizuno, Takaaki Ohnishi and Tsutomu Watanabe, Power laws in market capitalization during the Dot-com and Shanghai bubble periods, *Evolutionary and Institutional Economics Review*, **13**(2), 445-454, 2016.
- 12) Spencer Wheatley, Didier Sornette, Tobias Huber, Max Reppen and Robert N. Gantner, Are Bitcoin Bubbles Predictable? Combining a Generalized Metcalfe's Law and the LPPLS Model, arXiv preprint arXiv:1803.05663, 2018.

(おにし・たかあき, 東京大学大学院情報理工学系研究科)
(わたなべ・つとむ, 東京大学大学院経済学研究科)